جامعة البعث-كلية العلوم
السنة الأولى-رياضيات

امتحان مقرر مبادئ الاحصاء والاحتمال
العام الدراسي٢٠١٧/٢٠١٨-ف١

اسم الطال
المدة: ٩٠

**السؤال الأول(٥٠د): ليكن لدينا السلاسل والجداءات التالية:**

$$f(x,y)=a.x.y.e^{-(x^2+y^2)}\ ;\ x,y>0 ---, F(x)=b.\frac{5^x}{x!};\ x=0,1,...$$

**المطلوب:**

١- احسب الثابتة $a$ حتى تكون الدالة الأولى دالة كثافة احتمالية!

٢- ادرس استقلال المتحولين المعرفين بتلك الدالة!

٣-أوجد تشتت المتحولين وتغايرهما ومعامل ارتباطهما وتشتت مجموعهما!

٤- احسب الثابتة $b$ حتى يكون القانون الثاني قانون احتمالي!

٥-أوجد الدالة المولدة للقانون الثاني ثم توقع وتشتت المتحول الموافق!.

**السؤال الثاني (٣٠د):**

ليكن (X) متحول عشوائي طبيعي وسيطاه : $\mu$ ، $\sigma^2$ و المطلوب :

١) اكتب القانون الاحتمالي لهذا المتحول متحققاً من ذلك

٢) أوجد توقع هذا المتحول !

٣) قدر الوسيط الممثل للتوقع وبين نوعية التقدير!

**السؤال الثالث (٢٠د):**

استنتج مايلي:

١-قانون الاحتمال التام (الأحداث الشاملة)

٢- صيغة بايز.

**انتهت الأسئلة**

حمص ١٧ /١/٢٠١٨

د. مصطفى حـ

مع تمنياتي بالتوفـ

| اسم الطالب: | سلم درجات امتحان الاحصاء والاحتمال | جامعة البعث-كلية العلوم |
|---|---|---|
| المدة: ٩٠ د | العام الدراسي٢٠١٧/٢٠١٨-ف١ | السنة الأولى-رياضيات |

السؤال الأول-٥٠-: ١)-٧-:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x,y)\,dxdy = 1 \Rightarrow a\left[\int_0^{\infty} x.e^{-(x^2)}\,dx\right]\left[\int_0^{\infty} y.e^{-(y^2)}\,dy\right] = \frac{a}{4} = 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow$$

$$f(x,y) = 4x.y.e^{-(x^2+y^2)};\; x,y>0$$

٢)-١٣-:

$$f(x,y) = a.x.y.e^{-(x^2+y^2)}\;;\; x,y>0 ---, F(x) = b.\frac{5^x}{x!};\; x = 0,1,...$$

$$f(y) = \int_0^{\infty} f(x,y)\,dx = 4ye^{-(y^2)}\left[\int_0^{\infty} x.e^{-(x^2)}\,dx\right] = 2ye^{-(y^2)}\;;$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} f(x,y)\,dy = 4x.e^{-(x^2)}\left[\int_0^{\infty} y.e^{-(y^2)}\,dx\right] = 2xe^{-(x^2)}\;;$$

$$f(x).f(y) = \left(2xe^{-(x^2)}\right).\left(2ye^{-(y^2)}\right) = 4.x.y.e^{-(x^2+y^2)}.$$

فالمتحولان مستقلان.

٣)-٢٠-:

$$E(Y) = \int_0^{\infty} y.f(y)\,dx = 2\left[\int_0^{\infty} y^2e^{-(y^2)}\,dy\right] = \left[\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}}e^{-(u)}\,du\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

$$E(Y)^2 = \int_0^{\infty} y^2.f(y)\,dx = 2\left[\int_0^{\infty} y^3e^{-(y^2)}\,dy\right] = \left[\int_0^{\infty} u.e^{-(u)}\,du\right] = 1;$$

$$VarY = E(Y)^2 - (E(Y))^2 = 1 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow VarX = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{cov}(X,Y) = 0 = \rho(X,Y) \Rightarrow Var(X+Y) = 2\left(1+\frac{\pi}{4}\right).$$

٤) -٥-:

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1 \Rightarrow b\sum_{x=0}^{\infty}\frac{5^x}{x!} = 1 \Rightarrow b.e^5 = 1 \Rightarrow b = e^{-5}$$

٥) -٥-.

$$U_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx}F(x) = e^{-5}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{(5.e^t)^x}{x!} = e^{(5.e^t)-5}.$$

**الجواب الثاني(٣٠د):** ١- (١٠):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\;;\; x \in \mathbf{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 1; \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$$

٢-(١٠):

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sigma\int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}dt + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right) = \mu; \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}, \int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}dt = 0$$

٣- (٢٠): لدينا بحسب طريقة العزوم: $EX\Big|_{\hat{\mu}=\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X} \Rightarrow$

$$E\hat{\mu} = E\overline{X} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var\,\hat{\mu} = Var\,\overline{X} = Var\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} VarX_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$Var\,\hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

فالتقدير منصف ومتسق.

**الجواب الثالث (٢٠د):** ليكن $(H_i); i = 1,2,...,n$ أحداث تشكل تجزئة للحدث الأكيد، وبفرض لدينا حدث يتعلق بالاختبار

ولنكن $(A)$:

الإثبات: بما أن الحوادث $H_1, H_2, ..., H_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة:

$$A = A\cap S = A\cap[H_1\cup H_2\cup...\cup H_n]$$
$$= (A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup...\cup(A\cap H_n)$$

و هذه التجزئة هي A و بالتالي أصبح لدينا من جديد تجزئة أخرى و لكن للحدث

و بحسب خواص تابع الاحتمال فإن: $A\cap H_1, A\cap H_2, ..., A\cap H_n$

$$P(A) = P[(A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup...\cup(A\cap H_n)]$$
$$= P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)+...P(A\cap H_n)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = 1; \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$$

٢-(١٠):

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \overset{x=\sigma t+\mu}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma t+\mu)e^{\frac{-t^2}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\sigma\int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}dt + \mu\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt\right) = \mu; \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}, \int_{-\infty}^{\infty} te^{\frac{-t^2}{2}}dt = 0$$

٣- (٢٠): لدينا بحسب طريقة العزوم: $EX|_{\hat{\mu}=\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \overline{X} \Rightarrow \hat{\mu} = \overline{X} \Rightarrow$

$$E\hat{\mu} = E\overline{X} = E\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} EX_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\mu}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$Var\hat{\mu} = Var\overline{X} = Var\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} VarX_i}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sigma^2}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2}$$

$$Var\hat{\mu} = \frac{\sigma^2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

فالتقدير منصف ومتسق.

**<u>الجواب الثالث (٢٠د):</u>** ليكن $(H_i); i = 1,2,...,n$ أحداث تشكل تجزئة للحدث الأكيد، وبفرض لدينا حدث يتعلق بالاختبار ولكن $(A)$:

الإثبات: بما أن الحوادث $H_1, H_2, ..., H_n$ تشكل تجزئة لفضاء العينة:

$$A = A\cap S = A\cap[H_1\cup H_2\cup...\cup H_n]$$
$$= (A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup...\cup(A\cap H_n)$$

و هذه التجزئة هي A و بالتالي أصبح لدينا من جديد تجزئة أخرى و لكن للحدث

و بحسب خواص تابع الاحتمال فإن: $A\cap H_1, A\cap H_2, ..., A\cap H_n$

$$P(A) = P[(A\cap H_1)\cup(A\cap H_2)\cup...\cup(A\cap H_n)]$$
$$= P(A\cap H_1) + P(A\cap H_2) + ...P(A\cap H_n)$$

و منه نجد:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i).P_{H_i}(A)$$

ونحصل على صيغة بايز اعتماداً صيغة الأحداث الشاملة:

نعلم بحسب قاعدة الاحتمال الشرطي أن:

$$P_A(H_k)=\frac{P(A\cap H_k)}{P(A)}\ ;\ \ k=1,2,...,n$$

وبحسب صيغة الأحداث الشاملة فإننا نجد:

$$P_A(H_k)=\frac{P(H_k).P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i).P_{H_i}(A)}\ ;\ k=1,2,...,n$$

<u>انتهت الأجوبة</u>

د. مصطفى حسن

حمص ٢٠١٨/١/